

## \* 学术论文 \*

# 币形气隙散射声场特征\*

## ——指向性与频率特性研究

邓 晖 沈建中

中国科学院声学研究所声场声信息国家重点实验室, 北京 100080

**摘要** 币形裂纹的散射声场特征对裂纹型缺陷的超声无损检测具有重要意义。作为可以进行解析求解的简化模型, 采用扁椭球坐标系下的分离变量法对标量声场中的币形气隙散射远场进行了分析计算。由于散射声场等价数学问题的奇异性决定了场的独特性, 计算中讨论了微分方程的奇点及方程解的特性。数值计算结果表明, 远场散射系数随  $ka$  呈不规则振荡上升趋势, 而随入射角的不同, 远场指向性呈比较复杂的变化。变化规律与  $ka$  相关。随入射角的增大, 远场散射系数最大值迅速减小。

**关键词** 散射声场 币形气隙 指向性 扁椭球坐标

裂纹型缺陷的超声无损检测有赖于对其散射声场特征的确定。币形裂纹作为一种理论化的典型裂纹缺陷, 散射远场的特性具有典型性, 得到国内外研究者的重视。部分学者主要采用函数级数展开求解, Datta 采用匹配渐近展开方法在球坐标系下求得币形裂纹的近似解析表达式<sup>[1]</sup>, 边界条件的处理及级数的收敛性使解存在局限。近年来也有学者采用变换方法得到积分方程后直接求解解析<sup>[2-4]</sup>, 变换和积分时奇点的处理相当复杂。而近年来数值方法获得了广泛的应用<sup>[5]</sup>。作为提取裂纹检测特征量的理论基础, 也为进一步的币形裂纹散射场数值计算结果提供可靠的依据, 本文分析了标量声场中币形气隙散射场奇点的特性、分布, 通过对币形气隙散射声场解析解的大量数值化计算, 最终分析得出关于该类散射远场的多种特性。

### 1 币形气隙散射声场问题描述

设无限大均匀介质内有币形空隙位于  $xy$  平面内, 圆心与坐标原点重合(见图 1), 入射平面纵波沿与  $z$  轴的夹角  $\theta_i$  方向入射, 波数为  $k$ , 币形裂纹的直径为  $2a$ , 即

$$u^i(\mathbf{r}) = e^{ik \cdot \mathbf{r}} = e^{ik(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)}, \quad (1)$$

无限大均匀液体介质内声波场满足标量 Helmholtz 方程

$$(\nabla^2 + k^2)u(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in V. \quad (2)$$

裂纹的上下圆表面为无应力表面, 裂纹厚度近似为零, 由弹性波理论在裂纹表面有<sup>[6]</sup>

$$2\mu \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{r}) + \lambda \mathbf{n} (\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r})) + \mu \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{r})) = 0, \quad \mathbf{r} \in S, \quad (3)$$

2001-02-28 收稿, 2001-04-16 收修改稿

\* 国家自然科学基金资助项目(批准号: 19974062)

其中  $\mu, \lambda$  为 Lamé 常数, 对于弹性介质均为实数.

对于液体介质中的声波场有

$$\mu \mathbf{n} \cdot \nabla u(\mathbf{r}) = 0, \quad (4)$$

则

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \nabla u(\mathbf{r}) &= n_x \frac{\partial u}{\partial x} + n_y \frac{\partial u}{\partial y} + n_z \frac{\partial u}{\partial z} \\ &= \cos(\mathbf{n}, x) \frac{\partial u}{\partial x} + \cos(\mathbf{n}, y) \frac{\partial u}{\partial y} \\ &\quad + \cos(\mathbf{n}, z) \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial n} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

无穷远处, 满足 Sommerfeld 辐射条件

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u(\mathbf{r}) = 0, \quad (6)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial r} - iku(\mathbf{r}) \right) = 0. \quad (7)$$

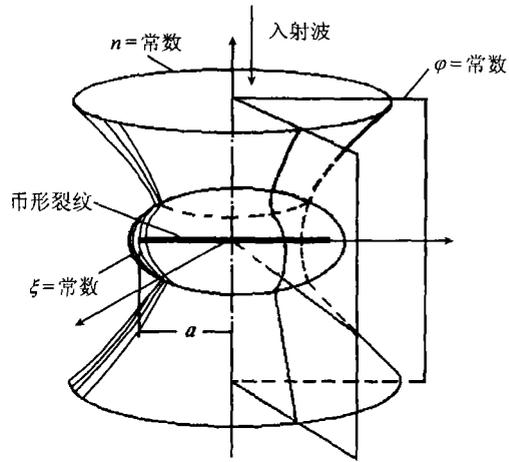


图 1 扁椭球坐标系中平面波入射币形气隙

## 2 散射远场解的特性

采用扁旋转椭球坐标系, 三坐标面分别为扁椭球面, 绕  $z$  轴旋转对称的单叶双曲面以及通过  $z$  轴的平面. 三坐标变量为  $\xi, \eta, \varphi$ , 取值范围分别是:  $\xi \in [1, \infty)$ ,  $\eta \in [-1, 1]$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$  (参见图 1).

$$\text{由: } \nabla \cdot (\nabla u) = \frac{1}{h} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{h}{h_\eta^2} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{h}{h_\xi^2} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{h}{h_\varphi^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \right], \quad (8)$$

$$\text{引入度规系数: } h_\eta^2 = a^2 \frac{(\xi^2 + \eta^2)}{(1 - \eta^2)}; \quad h_\xi^2 = a^2 \frac{(\xi^2 + \eta^2)}{(1 + \xi^2)}; \quad h_\varphi^2 = a^2(1 - \eta^2)(1 + \xi^2);$$

$$h = h_\eta h_\xi h_\varphi = a^3(\xi^2 + \eta^2). \quad (9)$$

并令  $c = ka$ , 得扁旋转椭球坐标系下的 Helmholtz 方程

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \eta} (1 - \eta^2) \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \xi} (1 + \xi^2) \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{(\xi^2 + \eta^2)}{(1 + \xi^2)(1 - \eta^2)} + c^2(\xi^2 + \eta^2) \right] u = 0, \quad (10)$$

$$\text{令 } u = S_{mn}(c, \eta) R_{mn}(c, \xi) \Phi(\varphi), \quad (11)$$

引入分离常数  $\lambda_{mn}$ ,  $m$ , 得到关于  $\eta, \xi, \varphi$  的二阶变系数常微分方程<sup>[7]</sup>.

$$(1) \text{ 关于 } \varphi \text{ 的方程有常规解: } \Phi(\varphi) = A \cos m\varphi + B \sin m\varphi. \quad (12)$$

(2) 关于  $\eta$  的方程有两个奇点,  $\eta = \pm 1$ . 当  $c \rightarrow 0$  时, 该方程近似超几何方程, 因此当  $c$  较小时, 方程在常点  $\eta = 0$  的邻域内存在可以用 Gegenbauer 函数展开的解. 为了保证在  $\eta = \pm 1$  处  $u$  为有限值, 采用第 1 种函数形式展开作为方程的解<sup>[8]</sup>

$$S_{mn}(-ic, \eta) = \sum_{r=0,1}^{\infty} a_r^{mn}(-ic) P_{m+r}^m(\eta). \quad (13)$$

式中  $n - m$  为奇数时, 取奇级数的和;  $n - m$  为偶数时, 取偶级数的和.  $P_{m+r}^m$  为  $m + r$  阶  $2m$  次第 1 类缔合 Legendre 函数.

(3) 关于  $\xi$  的方程,  $\xi = \infty$  为方程的非正则奇点, 在  $\xi \rightarrow \infty$  的极限情况下, 近似为 Bessel 方程, 由此在  $\xi \rightarrow \infty$  时, 存在可以用 Bessel 函数展开的解的渐近展式, 为了满足辐射条件, 选择第

3 类展式作解. 数值计算时按照渐近级数的最佳截断原则进行截取, 使截断误差最小.

利用 Bessel 函数的性质并选择适当的归一系数

$$R_{mn}(-ic, i\xi) = \frac{1}{\sum_{r=0,1}^{\infty} \frac{(2m+r)!}{r!} a_r^{mn}(-ic)} \left( \frac{\xi^2 + 1}{\xi^2} \right)^{\frac{1}{2}m} \sum_{r=0,1}^{\infty} i^{r+m-n} \frac{(2m+r)!}{r!} a_r^{mn}(-ic) j_{m+r}(c\xi). \quad (14)$$

式中  $n-m$  为奇数时取奇级数的和;  $n-m$  为偶数时取偶级数的和.  $j_{m+r}$  为  $m+r$  阶球 Bessel 函数.

散射远场为

$$C_s = 2i \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{\tilde{N}_{mn}} \frac{R_{mn}^{(1)}(-ic, i0)}{R_{mn}^{(3)}(-ic, i0)} S_{mn}(-ic, \cos\theta_i) S_{mn}(-ic, \eta) \cos m\varphi. \quad (15)$$

### 3 分离常数 $\lambda_{mn}$ 及解级数系数 $a_r^{mn}$ 的确定

将  $S_{mn}$  级数展式代入微分方程, 利用缔合 Legendre 函数的性质, 可以得到关于系数  $a_r^{mn}$  的二阶线性差分方程

$$A_r^m a_{r+2}^{mn}(-ic) + B_r^m a_r^{mn}(-ic) + C_r^m a_{r-2}^{mn}(-ic) = 0, \quad (16)$$

其中

$$A_r^m = \frac{(2m+r+2)(2m+r+1)}{(2m+2r+3)(2m+2r+5)} c^2, \quad (17)$$

$$B_r^m = \left[ (m+r+1)(m+r) - \lambda_{mn}(c) + \frac{2(m+r)(m+r+1) - 2m^2 - 1}{(2m+2r-1)(2m+2r+3)} c^2 \right], \quad (18)$$

$$C_r^m = \frac{r(r-1)c^2}{(2m+2r-3)(2m+2r-1)}. \quad (19)$$

用  $a_{r-2}^{mn}$  除(16)式两边

$$A_r^m \frac{a_{r+2}^{mn}(-ic) a_r^{mn}(-ic)}{a_r^{mn}(-ic) a_{r-2}^{mn}(-ic)} + B_r^m \frac{a_r^{mn}(-ic)}{a_{r-2}^{mn}(-ic)} = -C_{r-2}^{mn} \quad (20)$$

得到关于系数的无限递推连续分式

$$\frac{a_r^{mn}(-ic)}{a_{r-2}^{mn}(-ic)} = - \frac{C_{r-2}^{mn}}{B_r^{mn} + A_{r+2}^{mn} \frac{a_{r+2}^{mn}(-ic)}{a_r^{mn}(-ic)}}, \quad (21)$$

两边乘  $\frac{(2m+r)(2m+r-1)}{(2m+2r-1)(2m+2r+1)} c^2$ , 并记

$$\alpha_r^m = \frac{(2m+r)(2m+r-1)}{(2m+2r-1)(2m+2r+1)} c^2 \frac{a_r^{mn}(-ic)}{a_{r-2}^{mn}(-ic)}; \quad (22)$$

$$\beta_r^m = \frac{(2m+r)(2m+r-1)}{(2m+2r-1)(2m+2r+1)} c^2 C_{r-2}^{mn}; \quad (23)$$

$$\gamma_r^m = \lambda_{mn} - B_r^{mn}; \quad (24)$$

得到前向递推式, 即收敛的无限阶梯连续分式

$$\alpha_{r+2}^m = \frac{\beta_{r+2}^m}{\gamma_{r+2}^m - \lambda_{mn} - \frac{\beta_{r+4}^m}{\gamma_{r+4}^m - \lambda_{mn} - \dots}} \quad (25)$$

用  $\alpha_{r+2}^m$  除(16)式两边作类似变换, 得到逆向递推式

$$\alpha_{r+2}^m = \gamma_r^m - \lambda_{mn} - \frac{\beta_r^m}{\gamma_{r-2}^m - \lambda_{mn} - \frac{\beta_{r-2}^m}{\gamma_{r-4}^m - \lambda_{mn} - \dots}} \quad (26)$$

两连分式相等得到关于特征值  $\lambda_{mn}$  的超越方程, 将等式中  $\lambda_{mn}$  按  $c$  的幂级数展开, 即令  $\lambda_{mn}(-ic) = \sum_i l_{2i}^{mn} c^{2i}$ . 并令相同幂次项的系数相等, 求得系数  $l_{2i}^{mn}$ , 从而得到特征值的收敛幂级数计算式. 此时, 展式系数  $\alpha_r^m$  可以由关于  $\frac{\alpha_r^m(-ic)}{\alpha_{r-2}^m(-ic)}$  递推式展开的无限阶梯连分式及对应的逆向递推式得到的无限阶梯连分式直接求取.

### 4 数值计算

从上述的解析结果中很难得到散射远场的变化特性, 为此本文进行了数值化计算, 对以下的变化规律进行了分析:

(1) 在正入射条件下, 对多个不同的  $ka$  值分别计算了远场散射系数随方位角(与  $z$  轴夹角为  $\arccos \eta$ )的变化, 即正入射时, 不同  $ka$  值下散射远场的指向性. 图 2 所示为其中两个典型的结果, 其中不同子图对应不同的  $ka$  值.

(2) 在正入射条件下, 分别计算了远场多个不同方位处的远场散射系数随  $ka$  的变化. 这种变化规律实际上描述了散射远场的频谱特性. 图 3 所示为方位角坐标  $\eta$  分别为 0.3, 0.7 处远场散射系数随  $ka$  的变化.

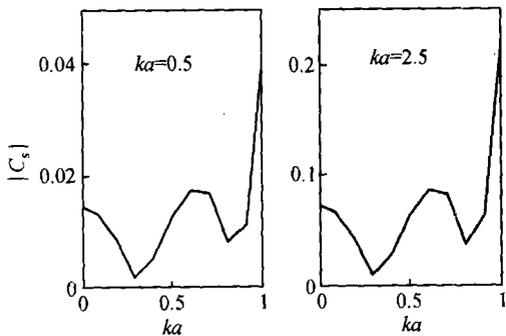


图 2 正入射不同  $ka$  值下散射远场与方位角关系

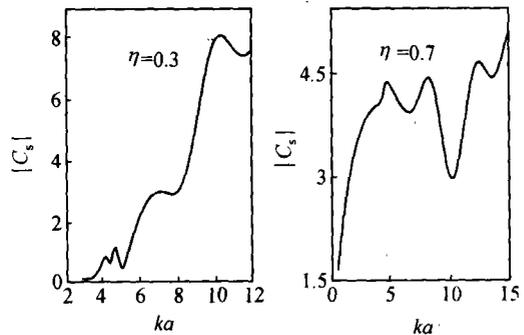


图 3 不同方位角处散射远场随  $ka$  的变化

(3) 研究了平面波以不同角度入射时, 远场( $\xi \rightarrow \infty$ )散射系数随  $\eta, \varphi$  坐标的分布, 这些变化实际上表明了在不同入射角下, 散射远场的指向性. 本文对多个  $ka$  值的情况分别进行了分析计算. 图 4 所示为  $ka = 1$ , 入射角分别为  $12^\circ, 30^\circ$  以及  $ka = 0.3$  且入射角为  $65^\circ, ka = 3$  且入射角为  $85^\circ$  时的散射远场分布.

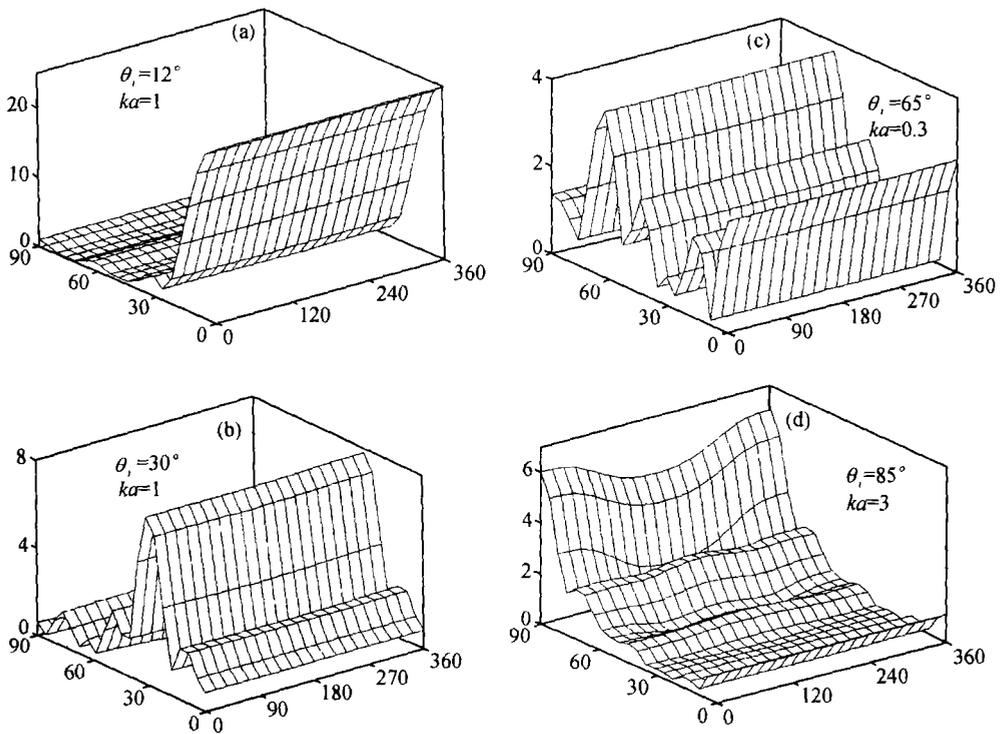


图 4 不同  $ka$  不同入射角下散射远场分布

图中各坐标轴表示量及单位分别为  $x: \varphi/(^\circ)$ ,  $y: \arccos\eta/(^\circ)$ ,  $z: |C_i|$

(4) 分析计算了不同入射角下, 散射远场系数的最大值及其所在位置. 图 5 所示为散射远场最大值随入射角的变化, 图中的两条曲线分别对应  $ka = 0.3, 3$  时的情形.

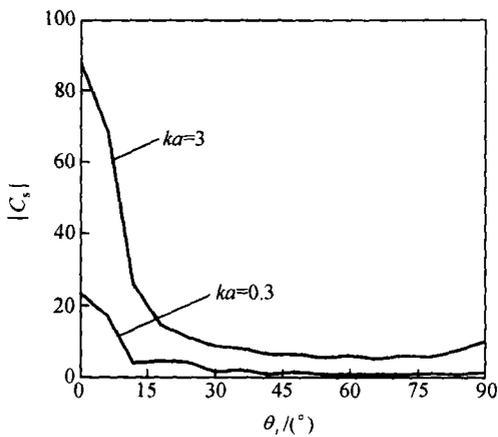


图 5 散射远场强度随入射角  $\theta_i$  的变化

有关,  $ka$  越大该角度越小, 但变化范围不大. 此外, 当  $ka$  较小时, 散射远场强度随  $\varphi$  坐标(周

## 5 结果讨论

依据计算结果, 正入射条件下对应不同的  $ka$  值, 币形气隙散射远场指向性分布变化不大, 但幅值变化明显(参见图 2). 强散射集中在  $z$  轴邻近区域, 随  $ka$  值增大, 这个区域宽度略变窄, 指向更加尖锐. 这与体积型缺陷的散射规律不同.

从散射远场随入射角的变化分析, 当入射角较小时, 在一定的取值范围内(随  $ka$  的不同, 这个范围略有变化), 指向性变化不大, 基本上集中在  $z$  轴邻域内. 当入射角增大到接近掠入射时, 强散射开始指向  $x$  轴方向, 入射角增大到一定值后这一特性保持不变. 入射角的这一定值大小与  $ka$

向位置)的变化不大(参见图 4),变化程度与入射角也有关。 $ka$  越大,变化越强烈。计算结果表明,其变化与  $ka$  的关系更大。

随  $ka$  的增大,散射远场强度总体呈增大趋势。对于线性材料,脉冲激发的散射声场可以看作由各频率分量的连续波激发的散射场叠加得到。散射远场强度随  $ka$  的变化反映了散射远场的频率特性,表明高频成分经散射后的损耗较小。但在某些频率处,散射远场系强度有振荡。因而在进行实际检测时,超声探头中心频率的选择直接影响信号接收的灵敏度。

随入射角的增大,散射系数的最大值移向与入射角对应的方位上。但在计算中发现,在多个不同的入射角入射条件下,除了在与入射角对应的方向上出现最强的散射峰外,在  $z$  轴处仍存在很强的散射,其幅值与最大值可比,形成明显的次峰,次峰出现的角度范围不连续,强度随入射角的变化剧烈。次峰的出现及强度除与入射角相关外,还与  $ka$  值有关。当  $ka$  值较小时,出现次峰的入射角总范围较宽,次峰相对主峰幅值随入射角的变化更剧烈,在某些入射角度下, $z$  轴处的散射系数甚至超过与入射角对应方向上的散射系数成为主峰。 $ka$  值越大,峰越明晰。

随入射角的增大,远场散射幅值的最大值迅速减小后变化趋于平缓。 $ka$  值越大,变化越剧烈。由此入射角越小检测灵敏度越高。频率越高,这一特性越明显。

### 参 考 文 献

- 1 Datta S K. Diffraction of plane elastic waves by ellipsoidal inclusions. *J Acoustic Soc Am*, 1977, 61(6): 1432
- 2 Martin P A, et al. Diffraction of elastic waves by a penny-shaped crack analytical and numerical results. *Proc R Soc Lond*, 1983, A390: 91
- 3 Keogh P S. High-frequency scattering of a normally incident plane compressional wave by a penny-shaped crack. *J Mech Appl Math*, 1986, 39(4): 535
- 4 Eriksson A S. Natural frequencies of penny-shaped crack with spring boundary condition. *J of Appl Mech*, 1995, 62: 59
- 5 Tsionopoulos S T. An advanced boundary element axisymmetric formulation for acoustic radiation and wave scattering problems. *J Acoustic Soc Am*, 1999, 105(3): 1517
- 6 Dassios G, et al. *Low Frequency Scattering*. Oxford: Clarendon Press, 2000
- 7 Philip M M. *Methods of Theoretical Physics*. New York: McGraw-Hill Book Co, 1953
- 8 Flammer C. *Spheroidal Wave Functions*. Stanford: Stanford U Press, 1957